Sujet

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\ln(x) - x - 2.$$

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$.
On note f' sa dérivée, f'' sa dérivée seconde et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère.

1. **a.** Démontrer que, pour tout x appartenant à $]0\,;\,+\infty[$, on a $f'(x) = \ln(x)$.

   b. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $x = \mathrm{e}$.

   c. Justifier que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   d. En déduire la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la tangente T.
2. **a.** Calculer la limite de la fonction f en 0.

   b. Démontrer que la limite de la fonction f en $+\infty$ est égale à $+\infty$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
4. **a.** Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$. On note α cette solution.

   b. Justifier que le réel α appartient à l'intervalle $]4{,}3\,;\,4{,}4[$.

   c. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
5. On considère la fonction `seuil` suivante écrite dans le langage Python :
   On rappelle que la fonction `log` du module `math` (que l'on suppose importé) désigne la fonction logarithme népérien ln.

```
def  seuil(pas) :
     x=4.3
     while x*log (x) - x - 2 < 0:
       x=x+pas
     return x
```

   Quelle est la valeur renvoyée à l'appel de la fonction `seuil(0.01)` ?
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.